Subiectul I
1. Să se arate că numărul {mat} (1/(1-i)-1/(1+i))^2{/mat} este real.
Rezolvare: Avem
{mat}(1/(1-i)-1/(1+i))^2=[((1+i)-(1-i))/((1-i)(1+i))]^2={/mat}
{mat}=((2i)/(1^2-i^2))^2=((2i)/(1+1))^2={/mat}
{mat}=((2i)/2)^2=i^2=-1 {in} {bbR}{/mat}.

2. Să se arate că vârful parabolei {mat}y=x^2+5x+1{/mat} este situat în cadranul III.
Rezolvare: Vârful V al parabolei {mat}y=x^2+5x+1{/mat} are coordonatele
{mat}x_V=-b/(2a); ~ y_V=-{Delta}/(4a){/mat}
adică
{mat}x_V=-5/(2{cdot}1); ~ y_V=-(b^2-4ac)/(4a){/mat}
sau
{mat}x_V=-5/2; ~ y_V=-(5^2-4{cdot}1{cdot}1)/(4{cdot}1){/mat}.
Prin urmare vârful V al parabolei {mat}y=x^2+5x+1{/mat} are coordonatele
{mat}x_V=-5/2 < 0; ~ y_V=-21/4 < 0{/mat}
şi deci este situat în cadranul III.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia {mat}9^x-10{cdot}3^(x-1)+1=0{/mat}.
Rezolvare: Avem
{mat}9^x-10{cdot}3^(x-1)+1=0 {doubleleftright}{/mat}
{mat}(3^2)^x-10{cdot}(3^x)/3+1=0{doubleleftright}{/mat}
{mat}(3^x)^2-10/3{cdot}3^x+1=0 ~ |{cdot}3{doubleleftright}{/mat}
{mat}3{cdot}(3^x)^2-10{cdot}3^x+3=0{/mat}.
Notăm {mat}3^x=t{/mat} iar ecuaţia de mai sus devine atunci
{mat}3t^2-10t+3=0{/mat}.
Atunci
{mat}{Delta}{prime}=(b/2)^2-ac=(-5)^2-3{cdot}3=16{/mat}
iar
{mat}t_1=(~-b/2-{sqrt{Delta}})/a{/mat}; {mat}t_2=(~-b/2+{sqrt{Delta}})/a{/mat}
adică
{mat}t_1=(5-{sqrt{16}})/3{/mat}; {mat}t_2=(5+{sqrt{16}})/3{/mat}
sau
{mat}t_1=1/3 > 0{/mat}; {mat}t_2=3 > 0{/mat}.
Pentru a găsi soluţiile ecuaţiei date vom rezolva ecuaţiile
{mat}3^x=1/3{/mat} şi {mat}3^x=3{/mat}.
Aceste soluţii sunt -1 şi respectiv 1. Prin urmare, mulţimea S a soluţiilor ecuaţiei date este
{mat}S={lbrace}-1;1{rbrace}{/mat}.

4. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre acesta să aibă exact două cifre egale.
Rezolvare: Notăm cu A evenimentul
A: alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, numărul ales are exact două cifre egale.
Atunci
{mat}P(A)=(nr. ~ cazurilor ~ favorabile)/(nr. ~ cazurilor ~ posibile){/mat}.
Există {mat}(999-99=) 900{/mat} de numere de 3 cifre, sau de cazuri posibile.
Dintre acestea
- 9 numere de trei cifre au exact două cifre egale cu 0 (ultimele două);
- 8 numere au ultimele două cifre egale cu 1 şi prima diferită de 1, 9 numere au prima şi ultima cifră egală cu 1 iar cifra din mijloc diferită de 1 şi tot 9 numere au primele două cifre egale cu 1 şi ultima cifră diferită de 1, adică 26 de numere au exact două cifre egale cu 1;
...
- 8 numere au ultimele două cifre egale cu 9 şi prima diferită de 9, 9 numere au prima şi ultima cifră egală cu 9 iar cifra din mijloc diferită de 9 şi tot 9 numere au primele două cifre egale cu 9 şi ultima cifră diferită de 9, adică 26 de numere au exact două cifre egale cu 9.
Aşadar, există
{mat}9+9{cdot}26=9{cdot}(1+26)=9{cdot}27=243{/mat}
numere de trei cifre care au exact două cifre egale, sau cazuri favorabile.
Prin urmare
{mat}P(A)=243/900=27/100{/mat}.

5. Să se determine {mat}a {in} {bbR}{/mat} pentru care vectorii
{mat}{vec{u}}=a{vec{i}}+(a+1){vec{j}} ~ şi ~ {vec{v}}=-(5a-1){vec{i}}+2{vec{j}}{/mat} sunt perpendiculari.
Rezolvare: Vectorii {mat}{vec{u}} ~ şi ~ {vec{v}}{/mat} sunt perpendiculari dacă şi numai dacă
{mat}u_1u_2+v_1v_2=0{doubleleftright}{/mat}
{mat}a[-(5a-1)]+(a+1){cdot}2=0{doubleleftright}{/mat}
{mat}-5a^2+a+2a+1=0{doubleleftright}{/mat}
{mat}-5a^2+3a+2=0{doubleleftright}{/mat}
{mat}5a^2-3a-2=0{/mat}.
Avem
{mat}{Delta}=b^2-4ac={/mat}
{mat}=(-3)^2-4{cdot}5{cdot}(-2)=49{/mat}
iar
{mat}a_1=(~-b-{sqrt{Delta}})/(2a){/mat}; {mat}a_2=(~-b+{sqrt{Delta}})/(2a){/mat}
sau
{mat}a_1=(3-{sqrt{49}})/10{/mat}; {mat}a_2=(3+{sqrt{49}})/10{/mat}
adică
{mat}a_1=(3-7)/10{/mat}; {mat}a_2=(3+7)/10{/mat}.
Prin urmare, pentru {mat}a {in} {lbrace}-2/5;1{rbrace}{/mat} vectorii {mat}{vec{u}}{/mat} şi {mat}{vec{v}}{/mat} sunt perpendiculari.

6. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ascuţitunghic ABC ştiind că {mat}AB=6, ~ AC=10{/mat} şi că aria triunghiului ABC este egală cu {mat}15{sqrt{3}}{/mat}.
Rezolvare: Avem
{mat}S_{ABC}=(bc{sin{A}})/2{doubleleftright}{/mat}
{mat}15{sqrt{3}}=(10{cdot}6{cdot}{sin{A}})/2{doubleleftright}{/mat}
{mat}30{sqrt{3}}=60{sin{A}}{doubleleftright}{/mat}
{mat}{sin{A}}={sqrt{3}}/2{doubleleftright}{/mat}
{mat}A={pi}/3{/mat} (triunghiul ABC fiind ascuţitunghic).
Aplicând acum teorema cosinusului în triunghiul ABC, pentru unghiul A, obţinem
{mat}a^2=b^2+c^2-2bc{cos{A}}{doubleleftright}{/mat}
{mat}a^2=10^2+6^2-2{cdot}10{cdot}6{cdot}{cos{{pi}/3}}{doubleright}{/mat}
{mat}a^2=136-120{cdot}(1/2){doubleleftright}{/mat}
{mat}a^2=76{doubleleftright}{/mat}
{mat}a={sqrt{76}}=2{sqrt{19}}{/mat}.
Aşadar, {mat}BC=2{sqrt{19}}{/mat}.

Subiectul II
1. Se consideră matricea {mat}A=({matrix{2}{3}{-1 2 2 2 2 -1}}){/mat}.
a) Să se calculeze rangul matricei A.
b) Să se demonstreze că {mat}det(A^t{cdot}A)=0{/mat}.
c) Să se determine o matrice nenulă {mat}B {in} M_{3,2}({bbQ}){/mat} astfel încât {mat}AB=O_2{/mat}.
Rezolvare:
a) Întrucât minorul de ordinul 2 care se obţine din matricea A prin suprimarea ultimei coloane, adică
{mat}d={delim{|}{matrix{2}{2}{-1 2 2 2}}{|}}{/mat}
este egal cu
{mat}d=(-1){cdot}2-2{cdot}2=-2-4=-6<>0{/mat},
rezultă că rangul matricei A este 2.
b) Avem
{mat}A^t{cdot}A=({matrix{3}{2}{-1 2 2 2 2 -1}}){cdot}({matrix{2}{3}{-1 2 2 2 2 -1}})={/mat}
{mat}=({matrix{3}{3}{(-1){cdot}(-1)+2{cdot}2 (-1){cdot}2+2{cdot}2 (-1){cdot}2+2{cdot}(-1) 2{cdot}(-1)+2{cdot}2 2{cdot}2+2{cdot}2 2{cdot}2+2{cdot}(-1) 2{cdot}(-1)+(-1){cdot}2 2{cdot}2+(-1){cdot}2 2{cdot}2+(-1){cdot}(-1)}})={/mat}
{mat}=({matrix{3}{3}{5 2 -4 2 8 2 -4 2 5}}){/mat}.
Fie
{mat}d=det(A^t{cdot}A)={delim{|}{matrix{3}{3}{5 2 -4 2 8 2 -4 2 5}}{|}}{/mat}.
Atunci, scoţând factor comun de pe linia a doua, avem
{mat}d=2{cdot}{delim{|}{matrix{3}{3}{5 2 -4 1 4 1 -4 2 5}}{|}}{/mat}.
Adunând apoi la prima linie a ultimului determinant elementele celei de-a treia linii, obţinem:

{mat}d=2{cdot}{delim{|}{matrix{3}{3}{1 4 1 1 4 1 -4 2 5}}{|}}{/mat}
şi întrucât determinantul rezultat are două linii egale, el este nul.
Prin urmare
{mat}det(A^t{cdot}A)=0{/mat}.
c) Putem alege o matrice nenulă B din {mat}M_{3,2}({bbQ}){/mat} cu cele două coloane identice, de forma:
{mat}B=({matrix{3}{2}{a a b b c c}}){/mat}
ale cărei elemente să verifice egalităţile:
{mat}{delim{lbrace}{matrix{2}{2}{{-a+2b+2c ~ =} {0} {2a+2b-c ~ =} {0}}}{}}{/mat}
(egalităţi rezultate din condiţia {mat}AB=O_2{/mat}.)
Înmulţind cu -1 prima ecuaţie şi adunând-o la a doua, obţinem:
{mat}3a-3c=0{doubleleftright}a-c=0{doubleleftright}a=c{/mat}.
Înlocuind pe c cu a în prima ecuaţie de exemplu, găsim:
{mat}-a+2b+2a=0{doubleleftright}a+2b=0{/mat}.
Putem alege de pildă {mat}a=2 {in} {bbQ}{/mat}, caz în care {mat}b=-1 {in} {bbQ}{/mat}.
Am găsit astfel o matrice nenulă B din mulţimea {mat}M_{3,2}({bbQ}){/mat} pentru care are loc relaţia {mat}AB=O_2{/mat}, şi anume:
{mat}B=({matrix{3}{2}{2 2 -1 -1 2 2}}){/mat}.

2. Se ştie că {mat}(G, {circ}){/mat} este grup, unde {mat}G=(3, ~ {+infty}){/mat} şi {mat}x{circ}y=(x-3)(y-3)+3{/mat}. Se consideră funcţia {mat}f:(0; ~ {+infty}) {right} G, f(x)=x+3{/mat}.
a) Să se calculeze {mat}4{circ}5{circ}6{/mat}.
b) Să se demonstreze că funcţia f este un izomorfism de grupuri de la {mat}((0; ~ {+infty}), {cdot}){/mat} la {mat}(G, {circ}){/mat}.
c) Să se demonstreze că dacă H este un subgrup al lui G care conţine toate numerele naturale {mat}k{>=}4{/mat}, atunci H conţine toate numerele raţionale {mat}q>3{/mat}.
Rezolvare:
a) Întrucât {mat}{prime}{circ}{prime}{/mat} este asociativă, avem:
{mat}4{circ}5{circ}6=(4{circ}5){circ}6={/mat}
{mat}=[(4-3)(5-3)+3]{circ}6=5{circ}6={/mat}
{mat}=(5-3)(6-3)+3=9{/mat}.
b) Pentru orice {mat}y {in} G=(3; ~ {+infty}){/mat}, ecuaţia {mat}f(x)=y{/mat} are soluţie unică în {mat}(0; ~ {+infty}){/mat}.
Într-adevăr,
{mat}f(x)=y{doubleleftright}x+3=y{doubleleftright}x=y-3>0{/mat}.
Prin urmare, funcţia f este bijectivă.
Funcţia f este un izomorfism de grupuri de la {mat}((0; ~ {+infty}), {cdot}){/mat} la {mat}(G, ~ {circ}){/mat} dacă şi numai dacă
1. f este bijectivă;
2. {mat}f(x{cdot}y)=f(x){circ}f(y), {forall} x, y {in} (0; ~ {+infty}){/mat}.
Mai rămâne să dovedim relaţia de la 2.
{mat}f(x{cdot}y)=f(x){circ}f(y), {forall}x, y {in} (0; ~ {+infty}){doubleleftright}{/mat}

{mat}xy+3=(x+3){circ}(y+3), {forall}x, y {in} (0; ~ {+infty}){doubleleftright}{/mat}
{mat}xy+3=((x+3)-3)((y+3)-3)+3, {forall}x, y {in} (0; ~ {+infty}){doubleleftright}{/mat}
{mat}xy+3=xy+3, {forall}x, y {in} {0; ~ {+infty}){/mat}, (A).
Din 1 şi 2 rezultă că f este un izomorfism de grupuri.
c) Întrucât f este un izomorfism de grupuri de la {mat}((0; ~ {+infty}), {cdot}){/mat} la (G, {circ}){/mat} ştim că
1. {mat}f(1)=4{/mat} este element neutru pentru legea de compoziţie {mat}{prime}{circ}{prime}{/mat};
2. {mat}{forall} x {in} (0; ~ {+infty}), ~ f(1/x)=1/x+3{/mat} este inversul elementului {mat}f(x)=x+3{/mat} din G, în raport cu legea de compoziţie {mat}{prime}{circ}{prime}{/mat}.
Să considerăm un număr raţional {mat}q, q>3{/mat} şi să arătăm că el aparţine subgrupului H care conţine toate numerele naturale cel puţin egale cu 4.
Întrucât {mat}q>3{/mat}, q poate fi scris sub forma
{mat}q=m/n+3, ~ unde m, n {in} {bbN}^{*}{/mat}.
Vom arăta că q poate fi obţinut prin compunerea a două elemente din H, de unde, H fiind un subgrup al lui G, va rezulta că q aparţine lui H.
Întrucât {mat}m, n {in} {bbN}^{*}{/mat}, rezultă că {mat}(m+3), (n+3) {in} H{/mat}. Atunci, H fiind subgrup al lui G, şi inversul lui {mat}(n+3){/mat} în raport cu {mat}{prime}{circ}{prime}{/mat} aparţine lui H. Dar conform afirmaţiei2, inversul lui {mat}(n+3){/mat} este {mat}(n+3){prime}=(1/n+3) {in} H{/mat}.
Prin urmare,
{mat}(m+3), (1/n+3) {in} H {doubleright} (m+3){circ}(1/n+3) {in} H{doubleleftright}{/mat}
{mat}(m+3), (1/n+3) {in} H{doubleright}((m+3)-3)((1/n+3)-3)+3=(m/n+3) {in} H{/mat},
adică am demonstrat că q aparţine lui H.
Cum q a fost un număr raţional mai mare ca 3 arbitrar ales, rezultă că H conţine toate numerele raţionale mai mari ca 3.

Subiectul III
1. Se consideră {mat}f:{bbR}{backslash}{lbrace}-1;0{rbrace} {right} {bbR}, f(x)=(2x+1)/(x^2(x+1)^2){/mat}.
a) Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.
b) Să se demonstreze că funcţia f nu are puncte de extrem local.
c) Să se calculeze {mat}{lim {n {right} {+infty}}{(f(1)+f(2)+...+f(n))^{n^2}}}, unde {mat}n {in} {bbN}^{*}{/mat}.
Rezolvare:
a) Să observăm mai întâi că pentru orice {mat}{x {in} {bbR}{backslash}{lbrace}-1;0{rbrace}{/mat}, are loc {mat}f(x)=1/(x^2)-1/((x+1)^2){/mat}.
Calculăm
{mat}m={lim {x {right} {-infty}}{(f(x))/x}}={lim {x {right} {-infty}}{1/x[1/(x^2)-1/((x+1)^2)]}}={/mat}

{mat}={lim {x {right} {-infty}} {1/(x^3)-1/(x(x+1)^2)}}=0-0=0{/mat}.
{mat}n={lim {x {right} {-infty}}{f(x)-mx}}={lim {x {right} {-infty}}{1/(x^2)-1/((x+1)^2)}}=0-0=0{/mat}.
Aşadar, graficul funcţiei f are ca asimptotă orizontală spre {mat}{-infty}{/mat} dreapta de ecuaţie {mat}y=0{/mat}.
Absolut analog se arată că graficul funcţiei f are ca asimptotă orizontală spre {mat}{+infty}{/mat} dreapta de ecuaţie {mat}y=0{/mat}.
Să calculăm acum
{mat}{lim {x {right} {-1}, x<-1}{f(x)}}={lim {x {right} {-1}, x<-1}{(2x+1)/(x^2(x+1)^2)}}=(-1)/(1{cdot}{prime}0-{prime})=(-1){cdot}({-infty})={+infty}{/mat};
{mat}{lim {x {right} {-1}, x>-1}{f(x)}}={lim {x {right} {-1}, x>-1}{(2x+1)/(x^2(x+1)^2)}}=(-1)/(1{cdot}{prime}0+{prime})=(-1){cdot}({+infty})={-infty}{/mat}.
Prin urmare, dreapta de ecuaţie {mat}x=-1{/mat} este asimptotă verticală atât la stânga, spre {mat}{+infty}{/mat}, cât şi la dreapta, spre {mat}{-infty}{/mat} pentru graficul funcţiei f.
Apoi,
{mat}{lim {x {right} 0, x<0}{f(x)}}={lim {x {right} 0, x<0}{(2x+1)/(x^2(x+1)^2)}}=1/({prime}0+{prime})={+infty}={/mat}
{mat}={lim {x {right} 0, x>0}{f(x)}}{/mat}.
Deci, dreapta de ecuaţie {mat}x=0{/mat} sau axa Ox este asimptotă verticală atât la stânga, cât şi la dreapta spre {mat}{+infty}{/mat} pentru graficul funcţiei f.
b) Funcţia f este derivabilă pe {mat}{bbR}{backslash}{lbrace}-1;0{rbrace}{/mat}şi în plus avem:
{mat}f{prime}(x)=[1/(x^2)-1/((x+1)^2)]{prime}={/mat}
{mat}=[x^{-2}-(x+1)^{-2}]{prime}=-2x^{-3}+2(x+1)^{-3}={/mat}
{mat}=2[1/((x+1)^3)-1/(x^3)]=(-2(3x^2+3x+1))/(x^3(x+1)^3), {forall} x {in} {bbR}{backslash}{lbrace}-1;0{rbrace}{/mat}.
Atunci
{mat}f{prime}(x)=0{doubleleftright}{/mat}
{mat}3x^2+3x+1=0{/mat}.
Dar
{mat}{Delta}=b^2-4ac=3^2-4{cdot}3{cdot}1=-3<0{/mat}
şi prin urmare derivata funcţiei f nu se anulează în nici un punct din mulţimea {mat}{bbR}{backslash}{lbrace}-1;0{rbrace}{/mat}.
Deci, funcţia f nu are puncte de extrem local.
c) Avem:
{mat}f(1)+f(2)+...+f(n)={/mat}
{mat}=1/(1^2)-1(2^2)+1/(2^2)-1/(3^2)+1/(3^2)-1/(4^2)+...+1/(n^2)-1/((n+1)^2)={/mat}
{mat}=1-1/((n+1)^2){/mat}.
Atunci
{mat}{lim {n {right} {infty}}{(f(1)+f(2)+...+f(n))^{n^2}}}={/mat}
{mat}={lim {n {right} {infty}} {[1-1/((n+1)^2)]^{n^2}}}={/mat}
{mat}={lim {n {right} {infty}} {{lbrace}[1-1/((n+1)^2)]^{(n+1)^2}{rbrace}^{(n^2)/((n+1)^2)}}}={/mat}
{mat}=e^{{lim {n {right} {infty}} {(n^2)/((n+1)^2)}}}=e^1=e{/mat}.

2. Se consideră şirul {mat}(I_n)_{n {in} {bbN}^{*}}, I_n={int {1}{2}{(x^n)/(x^n+1)}{dx}}, n {in}

{bbN}^{*}{/mat}.
a) Să se calculeze {mat}I_1{/mat}.
b) Să se arate că {mat}I_n {<=} 1, {forall} n {in} {bbN}^{*}{/mat}.
c) Să se calculeze {mat}{lim {n {right} {infty}}{I_n}}{/mat}.
Rezolvare:
a) {mat}I_1={int {1}{2}{x/(x+1)}{dx}}={int {1}{2}{(x+1-1)/(x+1)}{dx}}={int {1}{2}{1-1/(x+1)}{dx}}={/mat}
{mat}=[x-{ln {x+1}}]{vbar}_{1}^{2}={/mat}
{mat}=2-{ln {3}}-1+{ln {2}}=1+{ln {2/3}}{/mat}.
b) Întrucât
{mat}(x^n)/(x^n+1) {<=} 1, {forall} x {>=} 0{/mat} şi {mat}{forall}n {in} {bbN}^{*}{/mat},
rezultă folosind proprietăţile integralelor definite că
{mat}{int {1}{2}{(x^n)/(x^n+1)}{dx}} {<=} 1{cdot}(2-1){/mat},
adică
{mat}{int {1}{2}{(x^n)/(x^n+1)}{dx}} {<=} 1, {forall} n {in} {bbN}^{*}{/mat} sau {mat}I_n {<=} 1, {forall} n {in} {bbN}^{*}{/mat}.
c) Vom demonstra folosind teorema cleştelui că {mat}{lim {n {right} {infty}}{I_n}}=1{/mat}.
Într-adevăr, cf. pct. b
(1) {mat}I_nn {<=} 1, {forall}n {in} {bbN}^{*}{/mat}.
Apoi, pentru orice {mat}x {>=} 1{/mat} şi orice {mat}n {in} {bbN}^{*}{/mat} rezultă aplicând inegalitatea lui Bernoulli că
{mat}x^n=[1+(x-1)]^n {>=} 1+n(x-1){doubleleftright}{/mat}
{mat}1/(x^n) {<=} 1/(1+n(x-1)){doubleleftright}{/mat}
{mat}1+1/(x^n) {<=} 1+1/(1+n(x-1)){doubleleft}{/mat}
{mat}(x^n)/(x^n+1)=1/(1+1/(x^n)) {>=} 1/(1+1/(1+n(x-1)))=(nx-n+1)/(nx-n+2){/mat}.
Atunci, pentru orice {mat}n {in} {bbN}^{*}{/mat} avem
{mat}I_n={int {1}{2}{(x^n)/(x^n+1)}{dx}} {>=} {int {1}{2}{(nx-n+1)/(nx-n+2)}{dx}}{doubleleft}{/mat}
{mat}I_n {>=} {int {1}{2}{(nx-n+2-1)/(nx-n+2)}{dx}}{doubleleftright}{/mat}
{mat}I_n {>=} {int {1}{2}{1-1/n{cdot}n/(nx-n+2)}{dx}}{doubleleftright}{/mat}
{mat}I_n {>=} [x-1/n {cdot} {ln {delim{vbar}{nx-n+2}{vbar}}}] {vbar}_1^2{doubleleftright}{/mat}
(2) {mat}I_n {>=} (2-1/n{ln {n+2}}-1+1/n{ln {2}})=1-1/n{ln {(n+2)/2}}{/mat}.
Aşadar am demonstrat cf. lui (1) şi (2) că
{mat}1-{ln{(n+2)/2}}/n {<=} I_n {<=} 1, {forall} n {in} {bbN}^{*}{/mat}.
Dar
{mat}{lim {n {right} {infty}}{1-{ln {(n+2)/2}/n}}=1-{lim {n {right} {infty}}{{ln {(n+2)/2}}/((n+2)/2){cdot}((n+2)/2)/n}}=1-0=1{/mat}.
(am folosit la ultima egalitate faptul că {mat}{lim {x {right} {+infty}}{{ln {x}}/x}}=0)
Aplicând acum teorema cleştelui şirurilor {mat}I_n, a_n=1-{ln {(n+2)/2}}/n{/mat} şi şirului constant 1, rezultă că
{mat}{lim {n {right} {infty}}{I_n}}=1{/mat}.