Subiectul I
1. Să se determine numărul natural x din egalitatea:
{tex}1+5+9+...+x=231{/tex}.
Rezolvare: Membrul stâng al egalităţii este o progresie aritmetică cu primul termen 1 şi raţia 4.
Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice {tex}(a_{n})_{ngeq1}{/tex} este
{tex}S_{n}=frac{n(a_{1}+a_{n})}{2}{/tex}.
Aşadar
(1) {tex}1+5+9+...+x=231Leftrightarrow{/tex}
{tex}frac{n_{x}(1+x)}{2}=231{/tex},
Unde {tex inline}n_{x}{/tex} este numărul termenilor sumei din membrul stâng al egalităţii date.
Dar al n-lea termen al unei progresii aritmetice {tex}(a_{n})_{ngeq1}{/tex} în funcţie de primul termen şi raţia r, este dat de formula
{tex}a_{n}=a_{1}+(n-1)r, foralln geq1{/tex}.
Prin urmare
{tex}x=1+(n_{x}-1)cdot4Leftrightarrow{/tex}
(2) {tex}n_{x}=frac{x+3}{4}{/tex}.
Din (1) şi (2), rezultă
{tex}frac{frac{x+3}{4}(1+x)}{2}=231Leftrightarrow{/tex}
{tex}frac{x+3}{4}(1+x)=462Leftrightarrow{/tex}
{tex}(x+3)(x+1)=1848Leftrightarrow{/tex}
{tex}x^2+4x-1845=0{/tex}.
Avem
{tex}Delta'=(frac{b}{2})^2-ac=2^2-1cdot(-1845)=4+1845=1849{/tex}
şi
{tex}x_{1}=frac{frac{-b}{2}+sqrt{Delta'}}{a}=frac{-2+sqrt{1849}}{1}=-2+43=41{/tex};
{tex}x_{2}=frac{frac{-b}{2}-sqrt{Delta'}}{a}=frac{-2-sqrt{1849}}{1}{/tex}, soluţie care nu se acceptă, nefiind număr natural.
Deci, {tex}x=41{/tex}.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia:
{tex}2x^2-5x+3leq0{/tex}.
Rezolvare: Rezolvăm ecuaţia
{tex}2^2-5x+3=0{/tex}.
Discriminantul ecuaţiei este
{tex}Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4cdot2cdot3=25-24=1{/tex}.
Avem
{tex}x_{1}=frac{-b+sqrt{Delta}}{2a}=frac{5+sqrt{1}}{4}=frac{6}{4}=frac{3}{2}{/tex};
{tex}x_{2}=frac{-b-sqrt{Delta}}{2a}=frac{5-sqrt{1}}{4}=frac{4}{4}=1{/tex}.

Întrucât {tex}a=2>0{/tex}, funcţia de gradul al doilea
{tex}f:RtoR, f(x)=2x^2-5x+3{/tex}
ia valori de semn contrar lui a, adică negative, între rădăcini.
Prin urmare, soluţia inecuaţiei
{tex}2x^2-5x+3leq0{/tex}
este
{tex}S=[1;frac{3}{2}]{/tex}.

3. Să se determine inversa funcţiei bijective {tex}f:(0;infty)to(1;infty){/tex}, unde
{tex}f(x)=x^2+1{/tex}.
Rezolvare: Funcţia {tex}f:(0;infty)to(1;infty){/tex}, {tex}f(x)=x^2+1{/tex} este strict crescătoare pe {tex}(0;infty){/tex} şi deci injectivă iar {tex}Im f=(1;infty){/tex}, adică funcţia f este şi surjectivă.
Deci, f este bijectivă şi
{tex}f^{-1}:(1;infty)to(0;infty){/tex}.
Pentru a determina legea funcţiei inverse, vom rezolva ecuaţia
{tex}f(x)=y{/tex}
În mulţimea {tex}(0;infty){/tex}, x fiind necunoscuta iar y fiind parametru.
{tex}f(x)=y, xin(0;infty)Leftrightarrow{/tex}
{tex}x^2+1=y, xin(0;infty)Leftrightarrow{/tex}
(1) {tex}x^2=y-1, xin(0;infty){/tex}.
Cum {tex}xin(0;infty){/tex}, rezultă
{tex}y-1>0Leftrightarrow{/tex}
{tex}y>1Leftrightarrow{/tex}
{tex}yin(1;infty){/tex}
Iar ecuaţia (1) este echivalentă cu
{tex}x=sqrt{y-1}{/tex}.
Aşadar,
{tex}f^{-1}:(1;infty)to(0;infty){/tex}
iar
{tex}f^{-1}(y)=sqrt{y-1}{/tex}.

4. Se consideră mulţimea A={1;2;3;...;10}. Să se determine numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii A, care conţin elementul 1.
Rezolvare: Numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii A, care conţin elementul 1 este

acelaşi cu numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii {2;3;4;...;10}, adică este egal cu {tex}C_{9}^{2}=frac{9!}{2!(9-2)!}=frac{9!}{2!7!}=frac{7!cdot8cdot9}{2!7!}=frac{8cdot9}{2}=36{/tex}. Deci, numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii A, care conţin elementul 1 este egal cu 36.

5. Să se determine {tex}ninR{/tex} astfel încât distanţa dintre punctele A(2;m) şi B(m;-2) să fie 4.
Rezolvare: Distanţa dintre două puncte {tex}A(x_{A};y_{A}){/tex} şi {tex}B(x_{B};y_{B}){/tex} este dată de formula
{tex}AB=sqrt{(y_{b}-y_{A})^2+(x_{B}-x_{A})^2}{/tex}.
Pentru punctele A şi B din enunţ, distanţa AB este
{tex}AB=sqrt{(-2-m)^2+((m-2)^2}=sqrt{(m+2)^2+(m-2)^2}=sqrt{2m^2+8}{/tex}.
Aşadar
{tex}AB=4Leftrightarrow{/tex}
{tex}sqrt{2m^2+8}=4Leftrightarrow{/tex}
{tex}2m^2+8=16Leftrightarrow{/tex}
{tex}2m^2=8Leftrightarrow{/tex}
{tex}m^2=4Leftrightarrow{/tex}
{tex}min{-2;2}{/tex}.
Deci {tex}min{-2;2}{/tex}.

6. Să se calculeze {tex}cos frac{23pi}{12}sin frac{pi}{12}{/tex}.
Rezolvare:
{tex}cos frac{23pi}{12}sin frac{pi}{12}=sin frac{pi}{12}cos frac{23pi}{12}=frac{sin left(frac{pi}{12}+frac{23pi}{12}right)+sin left(frac{pi}{12}-frac{23pi}{12}right)}{2}={/tex}
{tex}=frac{sin frac{24pi}{12}+sin frac{-22pi}{12}}{2}=frac{sin 2pi-sin frac{11pi}{6}}{2}={/tex}
{tex}frac{-1}{2}sin frac{11pi}{6}=frac{-1}{2}sin frac{12pi-pi}{6}=frac{-1}{2}sin (2pi-frac{pi}{6})=frac{1}{2}sin frac{pi}{6}=frac{1}{2}cdotfrac{1}{2}=frac{1}{4}{/tex}.
Prin urmare
{tex}cos frac{23pi}{12}sin frac{pi}{12}=frac{1}{4}{/tex}.

Subiectul II
1. Se consideră matricea

{tex}
A =
left({begin{array}{cc}
a & b \
b & a \
end{array} } right)
{/tex},
cu {tex}a, binR{/tex} şi {tex}bneq0{/tex}.
a) Să se arate că dacă matricea {tex}XinM_{2}(R){/tex} verifică relaţia AX=XA, atunci există {tex}u, vinR{/tex} astfel încât
{tex}
X =
left({begin{array}{cc}
u & v \
v & u \
end{array} } right)
{/tex}.
b) Să se arate că {tex}forall n in N^*{/tex}, {tex}
A^n =
left({begin{array}{cc}
x_{n} & y_{n} \
y_{n} & x_{n} \
end{array} } right)
{/tex},
Unde {tex}x_{n}=frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}{/tex} şi {tex}y_{n}=frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}{/tex}.
c) Să se rezolve în mulţimea {tex}M_{2}(R){/tex} ecuaţia {tex}
X^3 =
left({begin{array}{cc}
2 & 1 \
1 & 2 \
end{array} } right)
{/tex}.
Rezolvare: a) Fie o matrice {tex}XinM_{2}(R){/tex} de forma
{tex}
X =
left({begin{array}{cc}
x & y \
z & t \
end{array} } right){/tex},
Cu {tex}x, y, z, tinR{/tex} care verifică relaţia {tex}AX=XA{/tex}.
Atunci
{tex}AX=XALeftrightarrow{/tex}
{tex}
left({begin{array}{cc}

a & b \
b & a \
end{array} } right)
cdot
left({begin{array}{cc}
x & y \
z & t \
end{array} } right)
=
left({begin{array}{cc}
x & y \
z & t \
end{array} } right)
cdot
left({begin{array}{cc}
a & b \
b & a \
end{array} } right)
Leftrightarrow{/tex}
{tex}
left({begin{array}{cc}
ax+bz & ay+bt \
bx+az & by+at \
end{array} } right)
=
left({begin{array}{cc}
xa+yb & xb+ya \
za+tb & zb+ta \
end{array} } right)
Leftrightarrow{/tex}
{tex}begin{cases}
ax+bz=ax+by \
ay+bt=bx+ay \
bx+az=az+bt \
by+at=bz+at \
end{cases}Leftrightarrow{/tex}
{tex}begin{cases}
bz=by \
bt=bx \
end{cases}Leftrightarrow{/tex}
{tex}begin{cases}
z=y \
t=x\
end{cases}{/tex}, întrucât {tex}bneq0{/tex}.
Notând {tex}x=t=u{/tex} şi {tex}y=z=v{/tex}, rezultă că există {tex}u, v in R{/tex} astfel încât
{tex}

X =
left({begin{array}{cc}
u & v \
v & u \
end{array} } right)
{/tex}.

b) Fie P(n): {tex}
A^n =
left({begin{array}{cc}
frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} & frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} \
frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} & frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} \
end{array} } right)
{/tex}, {tex}n in N^*{/tex}.

Vom demonstra prin inducţie după n că P(n) este adevărată pentru orice {tex}n in N^*{/tex}.

I. Pasul de verificare:
P(1): {tex}
A^1 =
left({begin{array}{cc}
frac{(a+b)^1+(a-b)^1}{2} & frac{(a+b)^1-(a-b)^1}{2} \
frac{(a+b)^1-(a-b)^1}{2} & frac{(a+b)^1+(a-b)^1}{2} \
end{array} } right)
Leftrightarrow{/tex}
{tex}
A =
left({begin{array}{cc}
frac{a+b+a-b}{2} & frac{a+b-a+b}{2} \
frac{a+b-a+b}{2} & frac{a+b+a-b}{2} \
end{array} } right)
Leftrightarrow{/tex}
{tex}
A =
left({begin{array}{cc}
a & b \

b & a \
end{array} } right)
{/tex}, (A).

II. Presupunem că P(n) este adevărată şi vom demonstra atunci că şi P(n+1) este adevărată.
P(n+1): {tex}
A^{n+1} =
left({begin{array}{cc}
frac{(a+b)^{n+1}+(a-b)^{n+1}}{2} & frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} \
frac{(a+b)^{n+1}-(a-b)^{n+1}}{2} & frac{(a+b)^{n+1}+(a-b)^{n+1}}{2} \
end{array} } right)
{/tex}.
Avem:
{tex} A^{n+1}=Acdot A^n=
left({begin{array}{cc}
a & b \
b & a \
end{array} } right)
cdot
left({begin{array}{cc}
frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} & frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} \
frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} & frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} \
end{array} } right)
={/tex}

{tex}
=left({begin{array}{cc}
acdotfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}+bcdotfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} &
acdotfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}+bcdotfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} \
bcdotfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}+acdotfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} &
bcdotfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}+acdotfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} \
end{array} } right) ={/tex}

{tex}=
left({begin{array}{cc}
frac{(a+b)^n}{2}cdot(a+b)+frac{(a-b)^n}{2}cdot(a-b) &
frac{(a+b)^n}{2}cdot(a+b)-frac{(a-b)^n}{2}cdot(a-b) \
frac{(a+b)^n}{2}cdot(a+b)-frac{(a-b)^n}{2}cdot(a-b) &
frac{(a+b)^n}{2}cdot(a+b)+frac{(a-b)^n}{2}cdot(a-b) \
end{array} } right)={/tex}

{tex}=
left({begin{array}{cc}
frac{(a+b)^{n+1}+(a-b)^{n+1}}{2} & frac{(a+b)^{n+1}-(a-b)^{n+1}}{2} \
frac{(a+b)^{n+1}-(a-b)^{n+1}}{2} & frac{(a+b)^{n+1}+(a-b)^{n+1}}{2} \
end{array} } right)
{/tex}.
Prin urmare din P(n) rezultă P(n+1) şi deci P(n) este adevărată pentru orice {tex}n in N^*{/tex}.

c) Întrucât
{tex}X^4=X^3 cdot X=X cdot X^3{/tex},
unde {tex}
X^3 =
left({begin{array}{cc}
2 & 1 \
1 & 2 \
end{array} } right)
{/tex}, rezultă că matricea X comută cu o matrice de tipul A, în care {tex}a=2{/tex} şi
{tex}b=1{/tex}. Atunci, conform pct. a) rezultă că X este o matrice de forma {tex}
X =
left({begin{array}{cc}
x & y \
y & x \
end{array} } right)
{/tex}, unde {tex}x,y in R{/tex}, iar {tex}yneq0{/tex}.
Atunci, din b) rezultă că {tex}
X^3 =
left({begin{array}{cc}
frac{(x+y)^3+(x-y)^3}{2} & frac{(x+y)^3-(x-y)^3}{2} \
frac{(x+y)^3-(x-y)^3}{2} & frac{(x+y)^3+(x-y)^3}{2} \
end{array} } right)
{/tex}.
Aşadar
{tex}
X^3 =
left({begin{array}{cc}
2 & 1 \
1 & 2 \
end{array} } right)
Leftrightarrow{/tex}
{tex}
left({begin{array}{cc}
frac{(x+y)^3+(x-y)^3}{2} & frac{(x+y)^3-(x-y)^3}{2} \
frac{(x+y)^3-(x-y)^3}{2} & frac{(x+y)^3+(x-y)^3}{2} \
end{array} } right) ={/tex}

{tex}
=left({begin{array}{cc}
2 & 1 \
1 & 2 \
end{array} } right)
Leftrightarrow{/tex}
{tex}
begin{cases}
frac{(x+y)^3+(x-y)^3}{2}=2 \
frac{(x+y)^3-(x-y)^3}{2}=1 \
end{cases}Leftrightarrow{/tex}
{tex}begin{cases}
(x+y)^3+(x-y)^3=4 \
(x+y)^3-(x-y)^3=2 \
end{cases}{/tex}.
Adunând, respectiv scăzând cele două relaţii obţinem:
{tex}begin{cases}
(x+y)^3=3 \
(x-y)^3=1 \
end{cases}Leftrightarrow{/tex}
{tex}begin{cases}
x+y=sqrt[3]{3} \
x-y=1 \
end{cases}{/tex}.
Adunând, respectiv scăzând ultimele două relaţii obţinem:
{tex}x=frac{sqrt[3]{3}+1}{2}{/tex}, {tex}y=frac{sqrt[3]{3}-1}{2}{/tex}.
Prin urmare, soluţia ecuaţiei date este matricea
{tex}
X =
left({begin{array}{cc}
frac{sqrt[3]{3}+1}{2} & frac{sqrt[3]{3}-1}{2} \
frac{sqrt[3]{3}-1}{2} & frac{sqrt[3]{3}+1}{2} \
end{array} } right)
{/tex}.

2. Se consideră {tex}a in Z_{7}{/tex} şi polinomul {tex}f=X^6+aX+widehat{5}in Z_{7}[X]{/tex}.
a) Să se verifice că pentru orice {tex}bin Z_{7}{/tex}, {tex}bneqwidehat{0}{/tex}, are loc relaţia {tex}b^6=widehat{1}{/tex}.
b) Să se arate că {tex}x^6+widehat{5}=(x^3-widehat{4})(x^3+widehat{4}){/tex}, {tex}forall x in Z_{7}{/tex}.
c) Să se demonstreze că pentru orice {tex}a in Z_{7}{/tex}, polinomul f este reductibil în {tex}Z_{7}[X]{/tex}.
Rezolvare:
a) Fie {tex}b in Z_{7}{/tex}, {tex}bneqwidehat{0}{/tex}.

Atunci
{tex}(widehat{1})^6=widehat{1^6}=widehat{1}{/tex};
{tex}(widehat{2})^6=((widehat{2})^2)^3=(widehat{2^2})^3=widehat{4^3}=widehat{64}=widehat{1}{/tex};
{tex}(widehat{3})^6=((widehat{3})^2)^3=(widehat{3^2})^3=(widehat{2})^3=widehat{2^3}=widehat{8}=widehat{1}{/tex};
{tex}(widehat{4})^6=((widehat{4})^2)^3=(widehat{4^2})^3=widehat{2^3}=widehat{8}=widehat{1}{/tex};
{tex}(widehat{5})^6=((widehat{5})^2)^3=(widehat{5^2})^3=widehat{4^3}=widehat{64}=widehat{1}{/tex};
{tex}(widehat{6})^6=((widehat{6})^2)^3=(widehat{6^2})^3=widehat{1^3}=widehat{1}{/tex}.
Aşadar, pentru orice {tex}b in Z_{7}{/tex}, {tex}bneqwidehat{0}{/tex}, are loc relaţia {tex}b^6=widehat{1}{/tex}.
b) Fie {tex}x in Z_{7}{/tex}.
Atunci
{tex}(x^3-widehat{4})(x^3+widehat{4})=(x^3)^2-(widehat{4})^2=x^6-widehat{16}=x^6-widehat{2}=x^6+widehat{5}{/tex}.
c) Pentru {tex}a=widehat{0}{/tex}, polinomul f este
{tex}f=X^6+widehat{5}=(X^3-widehat{4})(X^3+widehat{4}){/tex}, conform pct. b)
Prin urmare, pentru {tex}a=widehat{0}{/tex}, polinomul f este reductibil în {tex}Z_{7}{/tex}, descompunându-se ca produs de două polinoame de gradul 3, cu coeficienţi în {tex}Z_{7}{/tex}.
Întrucât {tex}Z_{7}{/tex} este corp, orice element {tex}a in Z_{7}{/tex}, {tex}aneqwidehat{0}{/tex}, este inversabil şi pentru orice {tex}a in Z_{7}{/tex}, {tex}aneqwidehat{0}{/tex}, elementul {tex}a^{-1} in Z_{7}{/tex}este o rădăcină a lui f. Într-adevăr,
{tex}f(a^{-1})=(a^{-1})^6+a cdot a^{-1}+widehat{5}=widehat{1}+widehat{1}+widehat{5}=widehat{7}=widehat{0}{/tex}.
(Am folosit că {tex}(a^{-1})^6=widehat{1}{/tex}, conform pct. a)
Atunci, conform teoremei lui Bezout, polinomul {tex}X-a^{-1}{/tex} divide pe f, şi prin urmare, f este reductibil în {tex}Z_{7}[X]{/tex}, el putându-se descompune ca produs dintre un polinom de gradul 1 şi un polinom de gradul 5.
Aşadar, pentru orice {tex}a in Z_{7}{/tex}, polinomul f este reductibil în {tex}Z_{7}[X]{/tex}.

Subiectul III
1. Se consideră numărul real a>0 şi funcţia {tex}f:R to R{/tex}, {tex}f(x)=e^x-ax{/tex}.
a) Să se determine asimptota oblică la graficul funcţiei f către {tex}infty{/tex}.
b) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei f.
c) Să se determine {tex}a in (0;infty){/tex} ştiind că {tex}f(x) geq 1{/tex}, {tex}forall x in R{/tex}.
Rezolvare: Ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f către {tex}-infty{/tex} este {tex}y=mx+n{/tex},
Unde {tex}m=lim_{x to -infty}frac{f(x)}{x}{/tex}, iar {tex}n=lim_{x to -infty}[f(x)-mx]{/tex}.

Aşadar
{tex}m=lim_{x to -infty}frac{f(x)}{x}=lim_{x to -infty}frac{e^x-ax}{x}=lim_{x to -infty}(frac{e^x}{x}-a)=-a{/tex};
{tex}n=lim_{x to -infty}[f(x)-mx]=lim_{x to -infty}(e^x-ax+ax)=lim_{x to -infty}e^x=0{/tex}.
Deci, ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f către {tex}-infty{/tex} este
{tex}y=-ax{/tex}.
b) Funcţia {tex}f:R to R{/tex}, {tex}f(x)=e^x-ax{/tex}, este derivabilă pe R şi
{tex}f':R to R{/tex}, {tex}f'(x)=e^x-a{/tex}, {tex}forall xin R{/tex}.
În plus,
{tex}f'(x)=0Leftrightarrow{/tex}
{tex}e^x-a=0Leftrightarrow{/tex}
{tex}x=ln a{/tex}.
Prin urmare, {tex}ln a{/tex} este un punct critic al funcţiei f şi în plus
{tex}f'(x)>0{/tex}, {tex}forall x in (ln a;+infty){/tex}
şi
{tex}f'(x)<0{/tex}, {tex}forall x in (-infty;ln a){/tex}.
Deci, {tex}ln a{/tex} este un punct de minim global al funcţiei f iar funcţia f nu mai are alte puncte de extrem. Minimul funcţiei f este
{tex}m=f(ln a)=e^{ln a}-aln a=a-aln a{/tex}.
c) Am arătat că
{tex}f(x) geq a-aln a{/tex}, {tex}forall x in R{/tex}.
Atunci
{tex}f(x) geq 1{/tex}, {tex}forall x in RLeftrightarrow{/tex}
{tex}a-aln ageq 1Leftrightarrow{/tex}
{tex}a-aln a-1geq 0{/tex}.
Vom rezolva inecuaţia
{tex}x-xln x-1{/tex} în mulţimea {tex}(0;infty){/tex}.
Considerăm funcţia {tex}g:(0;infty)to R{/tex}, {tex}g(x)=x-xln x-1{/tex}.
Funcţia g este derivabilă pe {tex}(0;infty){/tex} şi
{tex}g':(0;infty) to R{/tex}, {tex}g'(x)=1-ln x-x cdot frac{1}{x}=1-ln x-1=-ln x{/tex}, {tex}forall x in(0;infty){/tex}.
Avem
{tex}g'(1)=0{/tex}
şi
{tex}g'(x)>0{/tex}, {tex}forall xin(0;1){/tex}
şi
{tex}g'(x)<0{/tex}, {tex}forall xin(1;infty){/tex}.
Cu alte cuvinte, 1 este punct de maxim global al funcţiei g pe {tex}(0;infty){/tex}, adică
{tex}g(x)leq g(1)=0{/tex}, {tex}forall xin(0;infty){/tex}, valoarea 0 fiind luată în 1.
Prin urmare, inecuaţia
{tex}g(x)geq 0{/tex}
Are o singură soluţie în intervalul {tex}(0;infty){/tex}, anume pe 1.
Deci
{tex}a-aln a-1geq 0Leftrightarrow{/tex}
{tex}a=1{/tex}
sau

{tex}f(x)geq 1{/tex}, {tex}forall x in R{/tex} pentru {tex}a=1{/tex}.

2. Se consideră funcţia {tex}f:(0;infty) to R{/tex}, {tex}f(x)=frac{ln x}{sqrt{x}}{/tex}.
a) Să se arate că funcţia {tex}F:(0;infty) to R{/tex}, {tex}F(x)=2sqrt{x}(ln x-2){/tex} este o primitivă a funcţiei f.
b) Să se arate că orice primitivă G a funcţiei f este crescătoare pe {tex}[1;infty){/tex}.
c) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii {tex}x=frac{1}{e}{/tex} şi {tex}x=e{/tex}.
Rezolvare:
a) Vom arăta că
{tex}F'(x)=f(x){/tex}, {tex}forall xin (0;infty){/tex}.
Într-adevăr, pentru orice {tex}x in (0;infty){/tex}
{tex}F'(x)=2 cdot frac{1}{2sqrt{x}} cdot (ln x - 2)+2sqrt{x} cdot frac{1}{x}=frac{1}{sqrt{x}}+frac{2}{sqrt{x}}=frac{1}{sqrt{x}}(ln x-2+2)=frac{ln x}{sqrt{x}}}{b}.{/tex}
b) Conform pct. a, o primitivă oarecare G a funcţiei f este de forma
{tex}G:(0;infty) to R{/tex}, {tex}G(x)=2sqrt{x}(ln x-2)+C{/tex}, {tex}forall xin (0;infty){/tex}, unde C este o constantă reală oarecare.
G este crescătoare pe {tex}[1;infty){/tex} dacă derivata ei, adică funcţia f, este pozitivă pe {tex}[1;infty){/tex}, ceea ce este evident.
c) Aria cerută este
{tex}A=int_{frac{1}{e}}^{e}f(x)dx=int_{frac{1}{e}}^{e}frac{ln x}{sqrt{x}}dx=int_{frac{1}{e}}^{e}(2sqrt{x})' cdot ln x dx{/tex}.
Aplicăm metoda de integrare prin părţi pentru funcţiile f şi g, unde {tex}f(x)=2sqrt{x}{/tex} şi {tex}g(x)=ln x{/tex}:
{tex}A=[2sqrt{x}ln x]|_{frac{1}{e}}^{e} - int_{frac{1}{e}}^{e} 2sqrt{x} cdot frac{1}{x} dx=2sqrt{e}ln e - 2sqrt{frac{1}{e}} ln (frac{1}{e}) - int_{frac{1}{e}}^{e}frac{2}{sqrt{x}}dx=2sqrt{e}+frac{2}{sqrt{e}}-4sqrt{x}|_{frac{1}{e}}^{e}=2sqrt{e}+frac{2}{sqrt{e}}-(4sqrt{e}-frac{4}{sqrt{e}})=2sqrt{e}+frac{2}{sqrt{e}}-4sqrt{e}+frac{4}{sqrt{e}}=-2sqrt{e}+frac{6}{sqrt{e}}{/tex}.
Aşadar
{tex}A=-2sqrt{e}+frac{6}{sqrt{e}}=frac{6-2e}{sqrt{e}}{/tex}.